Zofia CHILICKA
Polska Akademia Nauk
Zakład Oceanologii w Sopocie

ANALIZA STABILNOŚCI WARIANTÓW UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICOWYCH FAL DŁUGICH

1. WSTĘP

Głównym celem pracy jest analiza stabilności i dokładności aproksymacji metodą różnic skończonych następującego układu równań [10]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV + gD\frac{\partial \xi}{\partial x} - A\Delta_L U = -D\frac{\partial p_a}{\partial x} + \tau_x^s - \tau_x^b \qquad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU + gD\frac{\partial \xi}{\partial y} - A\Delta_L V = -D\frac{\partial p_a}{\partial y} + \tau_y^s - \tau_y^b \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

z warunkami granicznymi:

$$U = V = \xi = 0 \text{ dla } t = 0 \qquad (4)$$

$$U = V = 0 \quad \text{na zamkniętej linii brzegowej dla } t \geqslant 0; \qquad (5)$$

gdzie:

U i V — składowe wydatku objętościowego wzdłuż osi układu współrzędnych x, y;

t — czas;

f — parametr Coriolisa;

p_a — ciśnienie atmosferyczne

A — współczynnik lepkości burzliwej charakteryzujący wymianę pędu w kierunku poziomym,

g — przyspieszenie siły ciężkości;

D — głębokość;

ξ — odchylenie swobodnej powierzchni morza od położenia równowagi;

τ_x^s i τ_y^s — składcwe naprężenia wiatru styczne do swobodnej pcwierzchni;

τ_x^b i τ_y^b — składowe naprężenia wody i styczne do dna

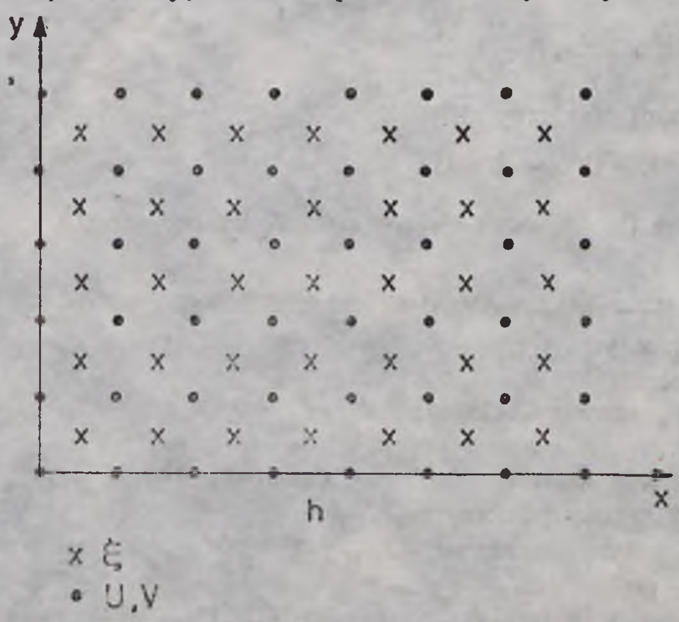
$\Delta_L = \frac{\partial^2}{\partial_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial_y^2}$ — dwuwymiarowy laplasjan.

Układ równań (1—5) opisuje zjawisko fal długich w morzach płytkich.

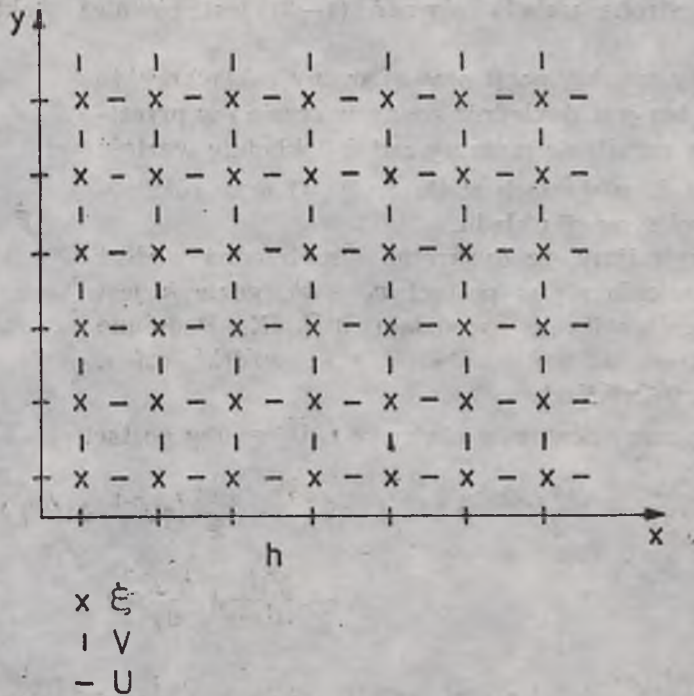
2. OCENA DOKŁADNOŚCI ROZWIĄZAŃ NUMERYCZNYCH UKŁADU

Aby oszacować dokładność rozwiązań rozważanych niżej schematów numerycznych, wykorzystajmy fakt, że dokładność rozwiązania jest tego samego rzędu, co aproksymacja równania różnicowego, jeżeli tylko schemat różnicowy jest stabilny [2].

W niniejszej pracy przy aproksymacji różnicowej równań (1—3) oprzemy się na jawnym schemacie numerycznym z zastosowaniem siatek przedstawionych na rys. 1 i 2 oraz jawno-niejawnym schemacie numerycznym z jawną realizacją na siatce przedstawionej na rys. 1 [1, 4].



Ryc. 1. Siatka obliczeń numerycznych.
Fig. 1. The computational grid.



Rys. 2. Siatka obliczeń numerycznych Platzmana.
Fig. 2. The Platzman computational grid.

Operator różniczkowy układu równań (1—3) zapiszmy w postaci:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + r - A\Delta_L & -f & gD\frac{\partial}{\partial x} \\ f & \frac{\partial}{\partial t} + r - A\Delta_L & gD\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$r = \frac{R}{D^2}\sqrt{U^2 + V^2} \quad R = 3 \cdot 10^{-3}$$

Operator ten działa na wektor kolumnowy

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ \xi \end{bmatrix}$$

Prawa strona układu równań (1—3) jest również wektorem kolumnowym:

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \tau_x^1 - D\frac{\partial p_a}{\partial x} \\ \tau_y^1 - D\frac{\partial p_a}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przy aproksymacji prawej strony zakładamy, że wektor ten jest dokładnie znany w czasie i w przestrzeni; w rezultacie możemy zadać dokładnie wartość wektora $\bar{F}$ w węzłach siatki (x, y; t) przy różnicowej aproksymacji układu.

Przyjmijmy, że dyskretna współrzędna wzdłuż osi x zmienia się w postaci $x_k = kh$, gdzie k jest liczbą całkowitą z przedziału $0 \leqslant k \leqslant K$. Podobnie wzdłuż osi y, $y_l = lh$, $0 \leqslant l \leqslant L$ oraz wzdłuż osi t, $t_n = n\tau$, $0 \leqslant n \leqslant N$.

Zapiszmy równanie rónicowe $L_h\bar{U}^h = 0$ w postaci

$$\frac{U^{n+1}-U^{n-1}}{2\tau} = \frac{f}{2}(\eta V^{n+1} + \vartheta V^{n-1}) - gD\frac{\partial \xi^n}{\partial x} - \frac{r^{n-1}}{2}(\eta U^{n+1} + \vartheta U^{n-1}) + A\left(\frac{\partial^2 U^{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^{n-1}}{\partial y^2}\right) \tag{6}$$

$$\frac{V^{n+1}-V^{n-1}}{2\tau} = -\frac{f}{2}(\eta U^{n+1} + \vartheta U^{n-1}) - gD\frac{\partial \xi^n}{\partial y} - \frac{r^{n-1}}{2}(\eta V^{n+1} + \vartheta V^{n-1}) + A\left(\frac{\partial^2 V^{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V^{n-1}}{\partial y^2}\right) \tag{7}$$

$$\frac{\xi^{n+2}-\xi^n}{2\tau} = -\frac{\partial U^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial U^{n+1}}{\partial y} \tag{8}$$

gdzie: $L_h\bar{U}^h$ — operator różnicowy,

η i ϑ — stałe, przy czym:

$\eta = 0$ i $\vartheta = 2$ dla schematu jawnego,

$\eta = \vartheta = 1$ dla schematu niejawnego.

Zbadajmy rząd aproksymacji niejawnego schematu numerycznego. Rozważmy różnice równania $L_h\bar{U}^h = 0$, które w siatce z rys. 1 przyjmuje następującą postać:

$$\frac{U_{k,l}^{n+1} - U_{k,l}^{n-1}}{2\tau} - \frac{f}{2}(V_{k,l}^{n+1} + V_{k,l}^{n-1}) + \frac{gD}{2h}(\xi^n_{k+1/2,l+1/2} - \xi^n_{k-1/2,l+1/2} + \xi^n_{k+1/2,l-1/2} - \xi^n_{k-1/2,l-1/2}) + \frac{r^{n-1}}{2}(U_{k,l}^{n+1} + U_{k,l}^{n-1}) - \frac{A}{h^2}(U_{k+1,l}^{n-1} + U_{k-1,l}^{n-1} + U_{k,l+1}^{n-1} + U_{k,l-1}^{n-1} - 4U_{k,l}^{n-1}) = 0 \tag{9'}$$

$$\frac{V^{n+1}_{k,l} - V^{n-1}_{k,l}}{2\tau} + \frac{f}{2}\left(U^{n+1}_{k,l} + U^{n-1}_{k,l}\right) + \frac{gD}{2h}\left(\xi^{n}_{k+1/2,l+1/2} - \xi^{n}_{k+1/2,l-1/2} + \right.$$

$$\left. + \xi^{n}_{k-1/2,l+1/2} - \xi^{n}_{k-1/2,l-1/2}\right) + \frac{r^{n-1}}{2}\left(V^{n+1}_{k,l} + V^{n-1}_{k,l}\right) - \frac{A}{h^2}\left(V^{n-1}_{k+1,l} + \right.$$

$$\left. + V^{n-1}_{k-1,l} + V^{n-1}_{k,l+1} + V^{n-1}_{k,l-1} - 4V^{n-1}_{k,l}\right) = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\xi^{n+2}_{k+1/2,l+1/2} - \xi^{n}_{k+1/2,l+1/2}}{2\tau} + \frac{1}{2h}\left(U^{n+1}_{k+1,l+1} - U^{n+1}_{k,l+1} + U^{n+1}_{k+1,l} - \right.$$

$$\left. - U^{n+1}_{k,l} + V^{n+1}_{k+1,l+1} - V^{n+1}_{k+1,l} + V^{n+1}_{k,l+1} - V^{n+1}_{k,l}\right) = 0 \tag{11}$$

Analiza układu (9—11) prowadzi do wniosku, że układ jest aproksymowany z dokładnością rzędu $0(\tau + h^2)$.

Biorąc pod uwagę, że wszystkie człony wyjściowego układu równań różniczkowych, z wyjątkiem sił tarcia poziomego i przy dnie, są aproksymowane z drugim rzędem dokładności w czasie i w przestrzeni, a także ten fakt, że laplasjan ma niewielki wpływ na wyniki obliczeń — można przypuszczać, że dokładność rozwiązania jest bliska drugiemu rzędowi w czasie i w przestrzeni [1, 10].

Układ równań (9—11) jest jawno-niejawny względem nieznanych funkcji U i V. Można go zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 + \tau r^{n-1} & -\tau f \\ \tau f & 1 + \tau r^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{n+1}_{k,l} \\ V^{n+1}_{k,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{U}^{n+1}_{k,l} \\ \tilde{V}^{n+1}_{k,l} \end{bmatrix} \tag{12}$$

gdzie:

$$\tilde{U}^{n+1}_{k,l} = U^{n-1}_{k,l} + \tau f V^{n-1}_{k,l} - \frac{\tau g D}{h}\left(\xi^{n}_{k+1/2,l+1/2} - \xi^{n}_{k-1/2,l+1/2} + \right.$$

$$\left. \xi^{n}_{k+1/2,l-1/2} - \xi^{n}_{k-1/2,l-1/2}\right) - \tau r^{n-1} U^{n-1}_{k,l} + \frac{2\tau A}{h^2}$$

$$\left(U^{n-1}_{k+1,l} + U^{n-1}_{k-1,l} + U^{n-1}_{k,l+1} + U^{n-1}_{k,l-1} - 4U^{n-1}_{k,l}\right)$$

$$\tilde{V}^{n+1}_{k,l} = V^{n-1}_{k,l} - \tau f U^{n-1}_{k,l} - \frac{\tau g D}{h}\left(\xi^{n}_{k+1/2,l+1/2} - \xi^{n}_{k+1/2,l-1/2} + \right.$$

$$\left. \xi^{n}_{k-1/2,l+1/2} - \xi^{n}_{k-1/2,l-1/2}\right) - \tau r^{n-1} V^{n-1}_{k,l} + \frac{2\tau A}{h^2}$$

$$\left(V^{n-1}_{k+1,l} + V^{n-1}_{k-1,l} + V^{n-1}_{k,l+1} + V^{n-1}_{k,l-1} - 4V^{n-1}_{k,l}\right)$$

Układ (12) jest równoważny równaniu macierzowemu

$$AV = \tilde{V}$$

Układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie.
Zatem

$$U_{k,l}^{n+1} = \frac{1}{(1+\tau r^{n-1})^2 + \tau^2 f^2}\left[(1+\tau r^{n-1})\tilde{U}_{k,l}^{n+1} + \tau f \tilde{V}_{k,l}^{n+1}\right] \tag{13}$$

$$V_{k,l}^{n+1} = \frac{1}{(1+\tau r^{n-1})^2 + \tau^2 f^2}\left[(1+\tau r^{n-1})\tilde{V}_{k,l}^{n+1} - \tau f \tilde{U}_{k,l}^{n+1}\right]$$

$$\xi_{k+1/2,l+1/2}^{n+2} = \xi_{k+1/2,l+1/2}^{n} - \frac{\tau}{h}\left(U_{k+1,l+1}^{n+1} - U_{k,l+1}^{n+1} + U_{k+1,l}^{n+1} - U_{k,l}^{n+1}\right)$$
$$- \frac{\tau}{h}\left(V_{k+1,l+1}^{n+1} - V_{k+1,l}^{n+1} + V_{k,l+1}^{n+1} - V_{k,l}^{n+1}\right)$$

Z układu (12) otrzymujemy jawny w realizacji schemat numeryczny.
Równania (6—8) dla $\eta = 0$ i $\vartheta = 2$ w siatce z rys. 1 przyjmują następującą postać:

$$\frac{U_{k,l}^{n+1} - U_{k,l}^{n-1}}{2\tau} - f V_{k,l}^{n-1} + \frac{gD}{2h}\left(\xi_{k+1/2,l+1/2}^{n} - \xi_{k-1/2,l+1/2}^{n} + \xi_{k+1/2,l-1/2}^{n} - \right.$$
$$\left.\xi_{k-1/2,l-1/2}^{n}\right) + r^{n-1}U_{k,l}^{n-1} - \frac{A}{h^2}\left(U_{k+1,l}^{n-1} + U_{k-1,l}^{n-1} + U_{k,l+1}^{n-1} + U_{k,l-1}^{n-1}\right.$$
$$\left.- 4U_{k,l}^{n-1}\right) = 0 \tag{14}$$

$$\frac{V_{k,l}^{n+1} - V_{k,l}^{n-1}}{2\tau} + fU_{k,l}^{n-1} + \frac{gD}{2h}\left(\xi_{k+1/2,l+1/2}^{n} - \xi_{k+1/2,l-1/2}^{n} + \xi_{k-1/2,l+1/2}^{n} - \right.$$
$$\left.\xi_{k-1/2,l-1/2}^{n}\right) + r^{n-1}V_{k,l}^{n-1} - \frac{A}{h^2}\left(V_{k+1,l}^{n-1} + V_{k-1,l}^{n-1} + V_{k,l+1}^{n-1} + V_{k,l-1}^{n-1}\right.$$
$$\left.- 4V_{k,l}^{n-1}\right) = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\xi_{k+1/2,l+1/2}^{n+2} - \xi_{k+1/2,l+1/2}^{n}}{2\tau} + \frac{1}{2h}\left(U_{k+1,l+1}^{n+1} - U_{k,l+1}^{n+1} + U_{k+1,l}^{n+1} - U_{k,l}^{n+1} + \right.$$
$$\left.V_{k+1,l+1}^{n+1} - V_{k+1,l}^{n+1} + V_{k,l+1}^{n+1} - V_{k,l}^{n+1}\right) = 0 \tag{16}$$

Otrzymany w ten sposób schemat ma drugi rząd dokładności w przestrzeni i pierwszy w czasie.

Trzeci schemat numeryczny zastosowany w niniejszej pracy, z pierwszym rzędem dokładności w czasie i drugim w przestrzeni na siatce Platzmana przyjmuje następującą postać:

$$\frac{U_{k+1,l}^{n+1}-\bar{U}_{k+1,l}^{n-1}}{2\tau}-\frac{f}{4}\left(V_{k+2,l-1}^{n-1}+V_{k+2,l+1}^{n-1}+V_{k,l-1}^{n-1}+V_{k,l+1}^{n-1}\right)+\frac{gD}{h}\left(\xi_{k+2,l}^{n}-\xi_{k,l}^{n}\right)$$

$$+r^{n-1}U_{k+1,l}^{n-1}-\frac{A}{h^2}\left(U_{k+3,l}^{n-1}+U_{k-1,l}^{n-1}+U_{k+1,l+2}^{n-1}+U_{k+1,l-2}^{n-1}-4U_{k+1,l}^{n-1}\right)=0 \tag{17}$$

$$\frac{V_{k,l+1}^{n+1}-V_{k,l+1}^{n-1}}{2\tau}+\frac{f}{4}\left(U_{k+1,l}^{n-1}+U_{k+1,l+2}^{n-1}+U_{k-1,l}^{n-1}+U_{k-1,l+2}^{n-1}\right)+\frac{gD}{h}\left(\xi_{k,l+2}^{n}-\xi_{k,l}^{n}\right)$$

$$+r^{n-1}V_{k,l+1}^{n-1}-\frac{A}{h^2}\left(V_{k+2,l+1}^{n-1}+V_{k-2,l+1}^{n-1}+V_{k,l+3}^{n-1}+V_{k,l-1}^{n-1}-4V_{k,l+1}^{n-1}\right)=0 \tag{18}$$

$$\frac{\xi_{k,l}^{n+2}-\xi_{k,l}^{n}}{2\tau}+\frac{1}{h}\left(U_{k+1,l}^{n+1}-U_{k-1,l}^{n+1}+V_{k,l+1}^{n+1}-V_{k,l-1}^{n+1}\right)=0 \tag{19}$$

3. ANALIZA STABILNOŚCI NUMERYCZNEJ UKŁADÓW

Przejdźmy do badania stabilności numerycznej układu równań (9—11) z prawą stroną $\bar{F}=[\tau_x^s, \tau_y^s, 0]$.

Równania te tworzą układ równań nieliniowych niejednorodnych o zmiennych współczynnikach. Na konturze rozpatrywanego obszaru układ ten spełnia warunki graniczne (4—5). Obecnie nie ma ogólnej teorii badania stabilności takich układów, dlatego w celu otrzymania przybliżonych ocen numerycznej stabilności należy przyjąć pewne uproszczone założenia. Zgodnie z przyjętą w praktyce procedurą, załóżmy, że $r = \text{const}$, $D = \text{const}$ i prawa strona układu równań jest równa zeru. Otrzymamy wówczas układ równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach. Rozpatrzmy obszar nieograniczony. Rozwiązanie układu (9—11) można przedstawić w postaci funkcji harmonicznej [9].

$$f_{k,l}^{n}=\bar{f}^{n}e^{ik\alpha+il\beta} \tag{20}$$

gdzie:

f — dowolna z funkcji U, V, ξ;

$\bar{f}$ — jej amplituda;

α i β — liczby falowe wzdłuż osi x i y pomnożone przez krok siatki;

n — numer kroku czasowego.

Podstawiając (20) do (9—11) otrzymujemy:

$$\bar{U}^{n+1} = a\bar{U}^{n-1} + b\bar{V}^{n-1} - i\,4\tau g D c \bar{\xi}^{n} \tag{21}$$

$$\bar{V}^{n+1} = -b\bar{U}^{n-1} + a\bar{V}^{n-1} - i\,4\tau g D d \bar{\xi}^{n} \tag{22}$$

$$\bar{\xi}^{n+2} = -i\,4\tau k\bar{U}^{n-1} - i\,4\tau p\bar{V}^{n-1} + e\bar{\xi}^{n} \tag{23}$$

gdzie:

$$a = \frac{h^2 - \tau^2 r^2 h^2 - \tau^2 f^2 h^2 - 8\tau A\Theta - 8\tau^2 Ar\Theta}{h^2[(1+\tau r)^2 + \tau^2 f^2]}$$

$$b = \frac{2\tau f h^2 - 8\tau^2 Af\Theta}{h^2[(1+\tau r)^2 + \tau^2 f^2]}$$

$$c = \frac{\tau f\bar{c} + (1+\tau r)\bar{d}}{h[(1+\tau r)^2 + \tau^2 f^2]}$$

$$d = \frac{(1+\tau r)\bar{c} - \tau f\bar{d}}{h[(1+\tau r)^2 + \tau^2 f^2]}$$

$$e = 1 - \frac{16\tau^2 gD\bar{d}^2(1+\tau r) + 16\tau^2 gD\bar{c}^2(1+\tau r)}{h^2[(1+\tau r)^2 + \tau^2 f^2]}$$

$$k = \frac{a\bar{d}}{h} - \frac{b\bar{c}}{h}, \qquad p = \frac{b\bar{d}}{h} - \frac{a\bar{c}}{h}$$

$$\Theta = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}$$

$$\bar{c} = \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad \bar{d} = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

Układ (21—23) wiąże wartości amplitud poziomu i składowych wydatku na czterech poziomach czasowych: $n+2$, $n+1$, n, $n-1$. W celu sprowadzenia tego układu do dwuwarstwowego schematu wprowadzimy nowe zmienne:

$$\bar{U}_1^{n+1} = \bar{U}^{n}, \qquad \bar{V}_1^{n+1} = \bar{V}^{n}, \qquad \bar{\xi}_1^{n} = \bar{\xi}^{n+1}$$

Wówczas układ (21—23) przyjmuje postać:

$$\bar{U}^{n+1} = a\bar{U}_1^n + b\bar{V}_1^n - i4\tau gDc\bar{\xi}^n \tag{24}$$

$$\bar{V}^{n+1} = -b\bar{U}_1^n + a\bar{V}_1^n - i4\tau gDd\bar{\xi}^n \tag{25}$$

$$\bar{\xi}_1^{n+1} = -i4\tau(k\bar{U}_1^n + p\bar{V}_1^n) + e\bar{\xi}^n \tag{26}$$

Zapiszmy układy (24—26) w postaci macierzowej:

$$W^{n+1} = G\,W^n$$

gdzie:

W — wektor o składowych $[\bar{U}, \bar{U}_1, \bar{V}, \bar{V}_1, \bar{\xi}, \bar{\xi}_1]$;
G — macierz przejścia

$$G = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & b & -i4\tau gDc & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & a & -i4\tau gDd & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i4\tau k & 0 & -i4\tau p & e & 0 \end{bmatrix}.$$

Zastosujmy kryterium stabilności von Neumanna, według którego układ jest stabilny wówczas, gdy wartość bezwzględna wartości własnych macierzy *G* przy dowolnych wartościach α i β jest mniejsza lub równa jedności [9]. Wartości własne macierzy *G* zależą na ogół od następujących wielkości: A, r, f, h, τ, D, α i β. W związku z tym kryterium von Neumanna prowadzi do uzyskania pewnych relacji między tymi wielkościami. W naszym przypadku będziemy uzyskiwali pewne ograniczenia na τ, przy których schemat jest stabilny.

Wartości własne *G* są pierwiastkami równania

$$\lambda^6 - \lambda^4(2a+e) + \lambda^2[16\tau^2 gD(dp+ck) + 2ae + b^2 + a^2] -$$

$$[16\tau^2 gD(dpa + cpb - dkb + ack) + e(a^2+b^2)] = 0. \tag{27}$$

W tabl. 1 zestawiono ograniczenia na τ w zależności od wartości parametrów *A* i *h*, przy których schemat jest stabilny. Badania przeprowadzono dla najkrótszych fal ($L_{min} = 2h$).

Kryteria stabilności dla schematu (9—11) Tablica 1

Założenia o parametrach Basic assumptions	Warunki stabilności Stability conditions
$r = f = A = 0$, α, β dowolne / α, β arbitrary	$\tau \leq \frac{h}{2\sqrt{2gD}}$
$r \neq 0,\ f \neq 0,\ A \neq 0,\ \alpha = \beta = \pi$	$\tau \leq \frac{h^2}{8A}$
$r \neq 0,\ f \neq 0,\ A = 0,\ \alpha = \beta = \pi$	bezwzględna stabilność absolute stability
$r = 0,\ f \neq 0,\ A \neq 0,\ \alpha = \beta = \pi$	$\tau \leq \frac{h^2}{8A}$
$r \neq 0,\ f = 0,\ A \neq 0,\ \alpha = \beta = \pi$	$\tau \leq \frac{h^2}{8A}$
$r = 0,\ f = 0,\ A \neq 0,\ \alpha = \beta = \pi$	$\tau \leq \frac{h^2}{8A}$
$r \neq 0,\ f = 0,\ A = 0,\ \alpha = \beta = \pi$	bezwzględna stabilność absolute stability
$r = 0,\ f \neq 0,\ A = 0,\ \alpha = \beta = \pi$	—"—

Przeanalizujmy stabilność układu równań różnicowych (17—19). Równanie charakterystyczne ma postać wzoru (27),

gdzie: $$a = 1 - 2\tau r - \frac{8\tau A(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)}{h^2}$$

$$b = 2\tau f \cos\alpha \cos\beta$$

$$k = \frac{a \sin\alpha}{h} - \frac{b \sin\beta}{h}, \quad p = \frac{b \sin\alpha}{h} + \frac{a \sin\beta}{h}$$

$$e = 1 - \frac{16\tau^2 gD(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)}{h^2}$$

$$c = \frac{\sin\alpha}{h}, \quad d = \frac{\sin\beta}{h}$$

$$\alpha = \frac{h}{2}\sigma_x \qquad \beta = \frac{h}{2}\sigma_y$$

σ_x i σ_y — liczby falowe wzdłuż osi x i y

W celu uproszczenia wyznaczenia pierwiastków tego równania przyjmijmy następujące założenia:

$$\left[2r + \frac{8A(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)}{h^2}\right]\tau \ll 1$$

$$(2f\tau)^2 \ll 1$$

Uzyskane rozwiązania równania charakterystycznego pozwalają znaleźć ograniczenia na τ przedstawione w tabl. 2.

Przeanalizujmy stabilność schematu (14—16). Równanie charakterystyczne ma postać (27),
gdzie:

$$a = 1 - 2\tau r - \frac{8\tau A\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}\right)}{h^2}$$

$$b = 2\tau f$$

$$c = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{h}, \qquad d = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{h}$$

$$e = 1 - \frac{16\tau^2 gD\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}{h^2}$$

$$k = ac - bd, \qquad p = bc + ad$$

$$\alpha = h\sigma_x \qquad \beta = h\sigma_y$$

Wartości τ, dla których schemat (14—16) jest stabilny, znajdują się w tabl. 3. Równanie charakterystyczne było rozwiązane przy założeniu

$$\left[2r + \frac{8A\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}\right)}{h^2}\right]\tau \ll 1$$

$$(2f\tau)^2 \ll 1$$

Tablica 2

Kryteria stabilności dla schematu (17—19)

Założenia o parametrach Basic assumptions	Warunki stabilności Stability conditions
$r \neq 0, f \neq 0, A \neq 0; \alpha\beta$ dowolne arbitrary	$\tau \leq \frac{h^2}{rh^2 + 8A}$; $\tau \leq \frac{rh^2 + 8A}{2f^2 h^2}$ $\tau \leq \frac{-(rh^2+8A) + \sqrt{(rh^2+8A)^2 + 32gDh^2}}{16gD}$
$r = 0, f = 0, A \neq 0$, —"—	$\tau \leq \frac{h^2}{8A}$; $\tau \leq \frac{-2A + \sqrt{4A^2 + 2gDh^2}}{4gD}$
$r \neq 0, f = 0, A \neq 0$, —"—	$\tau \leq \frac{h^2}{rh^2+8A}$; $\tau \leq \frac{-(rh^2+8A) + \sqrt{(rh^2+8A)^2 + 32gDh^2}}{16gD}$
$r = 0, f \neq 0, A \neq 0$, —"—	$\tau \leq \frac{h^2}{8A}$; $\tau \leq \frac{2A(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)}{f^2 h^2 \cos^2\alpha \cos^2\beta}$ $\tau \leq \frac{-2A + \sqrt{4A^2 + 2gDh^2}}{4gD}$
$r = 0, f = 0, A = 0$, —"—	$\tau \leq \frac{h}{2\sqrt{2gD}}$
$r \neq 0, f = 0, A = 0$, —"—	$\tau \leq \frac{1}{r}$; $\tau \leq \frac{-rh^2 + \sqrt{r^2h^4 + 32gDh^2}}{16gD}$
$r = 0, f \neq 0, A = 0$, —"—	niestabilność instability
$r \neq 0, f \neq 0, A = 0$, —"—	$\tau \leq \frac{1}{r}$; $\tau \leq \frac{r}{2f^2}$; $\tau \leq \frac{-rh^2 + \sqrt{r^2h^4 + 32gDh^2}}{16gD}$
$r \neq 0, f \neq 0, A \neq 0, \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$	$\tau \leq \frac{h^2}{rh^2+8A}$; $\tau \leq \frac{4h\sqrt{2gD} - (rh^2 + 8A)}{16gD}$
$r \neq 0, f \neq 0, A = 0, \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$	$\tau \leq \frac{1}{r}$; $\tau \leq \frac{4h\sqrt{2gD} - rh^2}{4gD}$
$r = 0, f \neq 0, A \neq 0, \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$	$\tau \leq \frac{h^2}{8A}$; $\tau \leq \frac{h\sqrt{2gD} - 2A}{4gD}$
$r \neq 0, f = 0, A \neq 0, \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$	$\tau \leq \frac{h^2}{rh^2+8A}$; $\tau \leq \frac{4h\sqrt{2gD} - (rh^2 + 8A)}{16gD}$
$r = 0, f = 0, A \neq 0, \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$	$\tau \leq \frac{h^2}{8A}$; $\tau \leq \frac{h\sqrt{2gD} - 2A}{4gD}$
$r \neq 0, f = 0, A = 0, \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$	$\tau \leq \frac{1}{r}$; $\tau \leq \frac{4h\sqrt{2gD} - rh^2}{16gD}$
$r = 0, f \neq 0, A = 0, \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$	$\tau \leq \frac{h}{2\sqrt{2gD}}$

Tablica 3

Kryteria stabilności dla schematu (14—16)

Założenia o parametrach Basic assumptions	Warunki stabilności Stability conditions
$r \neq 0, f \neq 0, A \neq 0; \alpha, \beta$ dowolne arbitrary	$\tau \leqslant \frac{h^2}{rh^2+8A}$; $\tau \leqslant \frac{rh^2+8A}{2f^2h^2}$ $\tau \leqslant \frac{-(rh^2+8A)+\sqrt{(rh^2+8A)^2+32gDh^2}}{16gD}$
$r=0, f=0, A \neq 0;$ — " —	$\tau \leqslant \frac{h^2}{8A}$; $\tau \leqslant \frac{-2A+\sqrt{4A^2+2gDh^2}}{4gD}$
$r \neq 0, f=0, A \neq 0;$ — " —	$\tau \leqslant \frac{h^2}{rh^2+8A}$; $\tau \leqslant \frac{-(rh^2+8A)+\sqrt{(rh^2+8A)^2+32Dh^2}}{16gD}$
$r=0, f \neq 0, A \neq 0;$ — " —	$\tau \leqslant \frac{h^2}{8A}$; $\tau \leqslant \frac{2A[\sin^2(\alpha/2)+\sin^2(\beta/2)]}{f^2h^2}$ $\tau \leqslant \frac{-2A+\sqrt{4A^2+2gDh^2}}{4gD}$
$r=0, f=0, A=0;$ — " —	$\tau \leqslant \frac{h}{2\sqrt{2gD}}$
$r \neq 0, f=0, A=0;$ — " —	$\tau \leqslant \frac{1}{r}$; $\tau \leqslant \frac{-rh^2+\sqrt{r^2h^4+32gDh^2}}{16gD}$
$r=0, f \neq 0, A=0;$ — " —	niestabilność instability
$r \neq 0, f \neq 0, A=0;$ — " —	$\tau \leqslant \frac{1}{r}$; $\tau \leqslant \frac{r}{2f^2}$; $\tau \leqslant \frac{-rh^2+\sqrt{r^2h^4+32gDh^2}}{16gD}$
$r \neq 0, f \neq 0, A \neq 0, \alpha=\beta=\pi$	$\tau \leqslant \frac{(rh^2+8A)h^2}{(rh^2+8A)^2+f^2h^4}$
$r \neq 0, f \neq 0, A=0, \alpha=\beta=\pi$	$\tau \leqslant \frac{r}{r^2+f^2}$
$r=0, f \neq 0, A \neq 0, \alpha=\beta=\pi$	$\tau \leqslant \frac{8Ah^2}{f^2h^4+64A^2}$
$r \neq 0, f=0, A \neq 0, \alpha=\beta=\pi$	$\tau \leqslant \frac{h^2}{rh^2+8A}$
$r=0, f=0, A \neq 0, \alpha=\beta=\pi$	$\tau \leqslant \frac{h^2}{8A}$
$r \neq 0, f=0, A=0, \alpha=\beta=\pi$	bezwzględna stabilność absolute stability
$r=0, f \neq 0, A=0, \alpha=\beta=\pi$	niestabilność instability

3. ZESTAWIENIE WYNIKÓW

Spróbujmy podsumować uzyskane wyniki dotyczące stabilności rozpatrywanych schematów.

Rozpatrzmy przypadek schematu różnicowego zapisanego na siatkach przedstawionych na rys. 1 i 2, z pierwszym rzędem dokładności w czasie i drugim w przestrzeni. Uzyskane rezultaty przedstawmy w punktach.

1. Jeżeli $r = f = A = 0$ oraz α i β dowolne, wówczas otrzymujemy kryterium Couranta, Friedrichsa i Levy'ego.
2. Jeżeli nie uwzględnia się w układach sił tarcia poziomego oraz przy dnie ($r=A=0$), a $f \neq 0$, wówczas dla dowolnego α i β ukadły nie są stabilne. Schemat różnicowy zapisany na siatce Platzmana dla najkrótszych fal ($\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$) jest stabilny przy warunku $\tau \leqslant \frac{h}{2\sqrt{2gD}}$
3. Jeżeli $A \neq 0$, $r \neq 0$, $f \neq 0$; $A \neq 0$, $r=0$, $f=0$; $A \neq 0$, $r \neq 0$, $f=0$; $A=0$, $r \neq 0$, $f=0$; $A=0$, $r \neq 0$, $f \neq 0$; $A \neq 0$, $r=0$, $f \neq 0$, to schematy różnicowe są stabilne warunkowo. Kryteria stabilności uzależniają krok czasowy od wartości współczynników tarcia przydennego i poziomej wymiany burzliwej pędu, parametru Coriolisa, kroku przestrzennego i głębokości akwenu.
4. Jeżeli $r \neq 0$ i $A=f=0$, wówczas schemat różnicowy zapisany na siatce przedstawionej na rys. 1 dla $\alpha=\beta=\pi$ jest stabilny dla dowolnego kroku czasowego. Przyjęcie $\alpha=\beta=\pi$ odpowiada analizowaniu najkrótszych fal [1, 5].

Schemat różnicowy zapisany na siatce Platzmana dla $\alpha=\beta=\pi/2$ jest stabilny warunkowo.

Nieco inny charakter mają wyniki uzyskane dla schematu z drugim rzędem dokładności w czasie i w przestrzeni. Analizę przeprowadzono jedynie dla najkrótszych fal.

Zestawmy uzyskane wyniki.

1. Jeżeli $A \neq 0$ i $r \neq 0$ lub $f \neq 0$; $A \neq 0$ i $f=r=0$; $A \neq 0$, $r \neq 0$ i $f \neq 0$, to schemat różnicowy jest stabilny przy tym samym warunku określającym stosunek między parametrami τ, h i A

$$\tau \leqslant \frac{h^2}{8A}$$

2. Jeżeli $A=0$ i $r \neq 0$ lub $f \neq 0$ to schemat różnicowy jest stabilny dla dowolnego kroku w czasie (bezwzględna stabilność).

3. Jeżeli $r=f=A=0$; α i β dowolne, wówczas $\tau \leqslant \frac{h}{2\sqrt{2gD}}$. Jest to znany warunek Couranta, Friedrichsa, Levy'ego.

Analiza przypadku najkrótszych fal prowadzi do wniosku, że schemat jawno-niejawny z jawną realizacją pozwala na zastosowanie większego kroku czasowego w porównaniu ze schematem jawnym zapisanym na siatkach przedstawionych na rys. 1 i 2, z pierwszym rzędem dokładności w czasie. Zwiększenie rzędu dokładności schematu jawno-niejawnego z jawną realizacją powoduje wydłużenie czasu obliczeń przy przejściu od kroku czasowego $n-1$ do $n+1$. Wydłużenie to może być kompensowane zastosowaniem większego kroku czasowego.

4. WNIOSKI KOŃCOWE

Przy rozwiązywaniu zadań nieliniowych może pojawić się tzw. nieliniowa niestabilność [7, 8]. Zwykle tę postać niestabilności tłumi się przy pomocy wprowadzenia do układu poziomej lepkości [3].

Jeżeli występują w równaniach wyrażenia z tarciem poziomym, to aby uzyskać jednoznaczne rozwiązanie, należy na brzegu zadać dwie składowe wydatku. Struktura siatki Platzmana pozwala zachować w każdym węźle tylko jedną charakterystykę. Dlatego w węzłach twardego konturu można zadać albo $U = 0$ albo $V = 0$, ale nie można zadać obydwu składowych wydatku jednocześnie.

Słabą stroną schematu różnicowego zapisanego na siatce Platzmana jest pojawienie się tzw. tarcia numerycznego, które opisuje się wyrażeniami $\frac{fh^2}{2}\Delta U$, $\frac{fh^2}{2}\Delta V$. Tarcie to powstaje przy aproksymacji członów, charakteryzujących wpływ siły Coriolisa. Efekt tarcia numerycznego może być bardzo odczuwalny jeżeli stosuje się siatkę o dużym kroku. Duża lepkość numeryczna prowadzi do silnego wygładzania obliczanych charakterystyk. W schematach zapisanych na siatce z rys. 1 tarcie numeryczne się nie pojawia.

Reasumując dokładność aproksymacji jest największa w metodzie, jawno-niejawnej z jawną realizacją na siatce z rys. 1 z drugim rzędem dokładności w czasie i w przestrzeni.

Ciekawym zjawiskiem jest fakt, że badanie stabilności dla schematów zapisanych na siatkach przedstawionych na rys. 1 i 2, z pierwszym rzędem dokładności w czasie prowadzi do uzyskania tych samych ograniczeń na τ, z wyjątkiem wypadku najkrótszych fal. W tym wypadku na siatce Platzmana siła Coriolisa nie oddziałuje na najkrótsze fale.

Z punktu widzenia badania stabilności najlepszy wydaje się być schemat jawno-niejawny z jawną realizacją.

Gdy $r=f=A=0$, wtedy uzyskany warunek, znany jako kryterium Couranta, Friedrichsa, Levey'ego, został uzyskany dla wszystkich trzech schematów.

ZOFIA CHILICKA

Polish Academy of Sciences
Institute of Oceanology — Sopot

STABILITY ANALYSIS FOR WARIANTS OF THE SYSTEM OF FINITE DIFFERENCE EQUATIONS FOR LONG WAVES

Summary

The paper presents an analysis of the stability and accuracy of approximation by the method of finite differences of the differential equation system (1 — 5) describing the phenomenon of long waves in shallow seas.

The assessment of the accuracy of the numerical solution was based on the Godunov and Riyabenki theorem, stating that for a stabile scheme the accuracy of the solution is of the same order as the approximation of the equation. The order of the approximation of the system considered was investigated for three schemes: explicit on the Platzman grid (17—19), explicit on the grid in fig. 1 (14—16), and explicit-implicit with explicit computation on the grid in fig. 1 (9—11). The two first schemes mentioned are of the same order of accuracy in time and of the second order in space, while the explicit-implicit scheme with explicit computition is of the second order in space, the order of the approximation in time being close to two.

In the second section the stability was studied by the von Neuman method. The results obtained depending on the way of the assignment of certain parameters are summarized in third section.

As the conclusion of these considerations, the explicit-implicit scheme with explicit computation has been accepted as the most appropriate from the point of view of the stability studies. This conclusion would appear to be important when taking into account that many cases were considered, including those which have not yet been studied.

LITERATURA

1. F i s h e r G.: *A survey of finite-difference approximations to the primitive equations*. Monthly Weather Rev., 93, No 1, 1965.
2. G o d u n o v S. K., W. S. R i a b e n k i j: *Theory of difference schemes*. Amsterdam 1964.
3. H a n s e n W.: *The reproduction of the motion in the sea by means of Hydrodynamical-Numerical methods*. Mitteilungen des Inst. f. Meereskunde, No 5, 1966.
4. K a g a n B. A.: *On the features of some finite difference schemes used at numerical integration of tidal dynamics equations*. Atmospheric and Oceanic Physics, No 7, 1970.
5. K a s a h a r a A.: *On certain finite-difference methods for fluid dynamics*. Monthly Weather Rev., 93, No 1, 1965.
6. M a r c h u k G., B. A. K a g a n, R. E. T a m s a l u: Chislennye metody raschota prilivnych dvizhenii w okrainnykh moryakh. Fizika Morya i Atmosfery, 5, nr 7, 1969.
7. M i y a k o d a K.: *Contribution to the numerical weather prediction-computation with fonite-difference*. Japan J. Geophys., 3, No 1, 1962.
8. P h i l l i p s N. A.: *An example of non-linear computational instability. The Atmosphere and the Sea in Motion*. Rockefeller Inst. Press and the Oxford University Press 1968.
9. R i c h t m y e r R. D., K. W. M o r t o n: *Difference methods for initial-value problems*. Interscience Publ. 1967.
10. V o l c i n g e r N. E., R. V. P y a s k o v s k i j: Osnovnye okeanologicheskie zadachi teorii mełkoi vody, Gidrometeorologicheskie Izd. 1968.